Passo *dopo* passo

di PAOLO BELLINGERI

Il principio di induzione non è difficile da definire, ma resta uno strumento da prendere "con le pinze". Nasconde infatti non poche sorprese...

Il principio di induzione afferma che un enunciato (o un'affermazione) $E(n)$ dipendente da un numero naturale n è vero per ogni numero naturale n più grande o uguale a un numero n_0 fissato se sono soddisfatte le due seguenti condizioni:
1. $E(n_0)$ è vera;
2. se si suppone che $E(n)$ sia vera (dove, ripetiamo, n è un qualsiasi numero naturale più grande o uguale a n_0), allora anche l'enunciato $E(n+1)$ è vero.

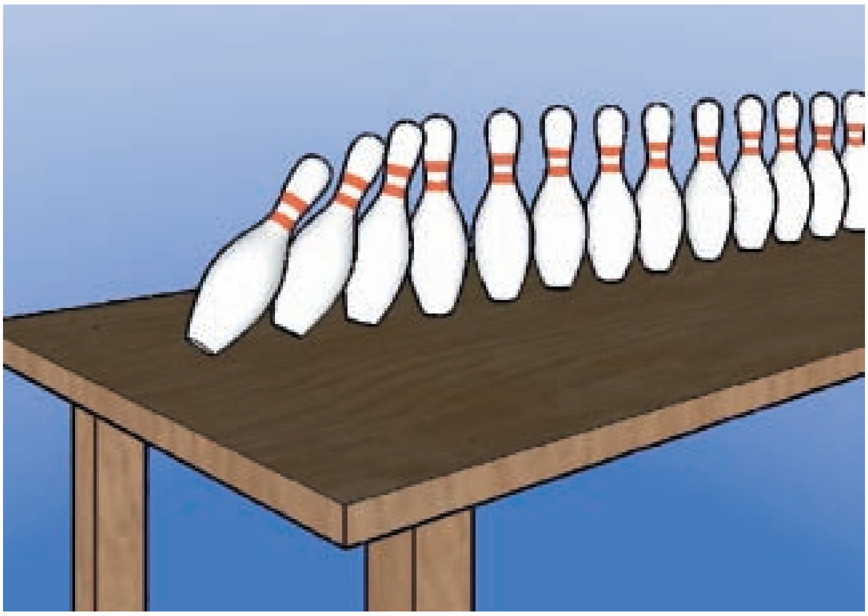
Se questa definizione vi è chiara, sarete sicuramente in grado di affrontare i seguenti problemi... non è vero?

LA FABBRICA DI NUMERI PRIMI DI EULERO

Prendete il polinomio $p(x) = x^2 + x + 41$ e calcolate $p(0)$, $p(1)$, $p(2)$ e $p(3)$. Che cosa hanno in comune questi 4 numeri? E che cosa succede per $p(n)$?

DOV'È L'ERRORE?

Ecco un "teorema" veramente strano e un po' "maschilista":
Se in un gruppo di persone c'è una donna, allora tutte le persone in questione sono donne.
Non ci credete? Allora ecco una dimostrazione!
Se il gruppo che stiamo osservando è composto da una sola persona, l'enunciato è ovviamente vero. Supponiamo che sia vero per un gruppo qualsiasi di n persone. Consideriamo dunque un gruppo di $n + 1$ persone in cui c'è almeno una donna (chiamamola Anna). Se da questo gruppo togliamo una persona (chiamiamola X), che non sia Anna, avremo un gruppo di n persone che contiene anch'esso almeno una donna, in quanto Anna ne fa parte.
Ri-aggiungiamo al gruppo la persona X che avevamo tolto, prendiamo un'altra persona e togliamola dal gruppo. Quest'ultima sarà sicuramente una donna in quanto abbiamo appena dimostrato che, salvo al massimo la persona X, il gruppo di $n + 1$ persone da cui siamo partiti è composto da sole donne: abbiamo quindi un nuovo gruppo di n persone con almeno una donna (anzi, $n - 1$): per ipotesi di induzione, anch'esso è composto di sole donne.
Ri-aggiungiamo la donna che avevamo tolto ed ecco che abbiamo dimostrato che il nostro gruppo si compone di sole donne!.
La dimostrazione sembra corretta, ma il risultato è falso (o, almeno, lo è in generale!): dove si nasconde l'errore?



Dida

Un punteggio impossibile

Il torneo delle 6 Nazioni (Italia, Francia, Inghilterra, Irlanda, Galles e Scozia) ha contribuito e contribuisce alla diffusione in Italia del gioco del Rugby. Per chi non lo sapesse, nel Rugby i punti si ottengono con delle punizioni e delle mete; le punizioni realizzate valgono 3 punti e le mete 5, più eventualmente altri 2 punti se si realizza il calcio (trasformazione) che sussegue ad una meta.
Provate ad usare il principio di induzione e dimostrate che ogni punteggio maggiore di 4 è possibile in una partita di Rugby.

Tutti i numeri interi sono uguali!

Non ci credete? Allora ve lo dimostriamo! Dire che tutti i numeri sono uguali è la stessa cosa che dire ogni numero è uguale al suo successore.
Supponiamo che sia vero che $k=k+1$ e dimostriamo che abbiamo anche l'uguaglianza $k+1=k+2$.
Aggiungendo 1 sia a destra che a sinistra della prima uguaglianza si ottiene la seconda, quindi anche questa è vera.
Perciò se il teorema è vero per $n=k$, esso è pure vero per $n=k+1$; grazie al processo di induzione possiamo quindi concludere che tutti i numeri interi sono uguali.
In realtà anche in questa dimostrazione abbiamo fatto un errore nell'applicazione del processo di induzione: avete scoperto dove?

Soluzioni

La fabbrica di numeri primi di Eulero
I valori $p(0)$, $p(1)$, $p(2)$ e $p(3)$ sono numeri primi. E potremmo essere tentati di affermare che allora $p(n)$ è primo per qualsiasi n. E magari di provare a usare il principio di induzione per provare la nostra asserzione…
Ma in realtà, questa congettura è falsa (si veda anche il box "La spirale di Ulam", *XlaTangente* n. 7/8 pag. 26). Per rendersene conto, basta considerare il numero $n = 41$: si ha $p(41) = 412 + 41 + 41 = 41 \times (41 + 2) = 41 \times 43$.
La cosa interessante è, come osservò per primo Eulero, che per n compreso tra 0 e 40, il numero $p(n)$ è SEMPRE un numero primo. Procedendo "passo a passo" avremmo impiegato un bel po' di tempo per scoprire che la congettura non era vera!

Dov'è l'errore?
Nel secondo passo di induzione del nostro problema si usa, anche se in maniera abbastanza nascosta, la supposizione che l'ipotesi sia vera per un numero n strettamente più grande di 2. Ma allora il primo passo di induzione richiederebbe di verificare che l'affermazione è vera per ogni gruppo di $n = 2$ persone, il che è chiaramente falso (per esempio per la coppia costituita da mio padre e mia madre)!

Un punteggio impossibile
È chiaro che è possibile avere punteggi di cinque, sei e sette punti. Per dimostrare l'affermazione, è sufficiente verificare che ogni numero maggiore o uguale a 8 si può scrivere come somma di multipli di 3 e 5; in termini "rugbystici", dimostreremo insomma che non è neppure necessario realizzare la trasformazioni che susseguono alle mete per ottenere un qualsiasi punteggio superiore a 8.
L'enunciato è valido per 8. Supponiamo che sia valido anche per un punteggio $k>8$. Si presentano due possibilità: o il punteggio può essere realizzato solo con punizioni da 3 punti, oppure il punteggio comprende almeno una meta (cinque punti). Nel primo caso il numero di punizioni non può essere inferiore a tre, visto che k è strettamente maggiore di 8. Dunque, per realizzare un punteggio di $k+1$ punti, 3 punizioni realizzate possono essere sostituite da 2 mete. Nel secondo caso, per realizzare $k+1$ punti basta sostituire la meta con due punizioni.

Tutti i numeri interi sono uguali!
Non abbiamo - ancora una volta! - verificato il primo passo, vale a dire non abbiamo verificato che l'ipotesi sia vera per un dato iniziale: come prima cosa dovremmo quindi trovare un numero intero uguale al suo successore, il che è impossibile!
Ad essere più precisi, come abbiamo visto nell'articolo su Peano in questo numero di *XlaTangente*, il fatto che ogni numero intero sia distinto dal suo successore è uno degli assiomi fondanti dell'Aritmetica.